

Durée : 4 heures

~ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2008 ~

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = -1 + 2i$, $b = 1 + 3i$, $c = 4i$.

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.
2. Soit I le milieu de [BC] et z_I son affixe.
 - a. Quel est l'ensemble des points M du plan distincts de A dont l'affixe z est telle que $\frac{z - z_I}{z - a}$ soit un réel ?
 - b. Déterminer l'unique réel x tel que $\frac{x - z_I}{x - a}$ soit un réel.
 - c. Soit $z_{\vec{AI}}$ l'affixe du vecteur \vec{AI} , donner une forme trigonométrique de $z_{\vec{AI}}$.
3.
 - a. Soit G le point d'affixe -3 . Montrer qu'il existe deux rotations de centre G, dont on déterminera les angles, telles que les images de A et I par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.
 - b. Soit r_1 la rotation de centre G et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$.
Déterminer l'écriture complexe de r_1 .

4. Soit A', B' et C' les images respectives de A, B, et C par la rotation r_1 ; soient a' , b' et c' leurs affixes.
Quelle est l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle ABC ?
En déduire que $b' = \overline{c'}$.

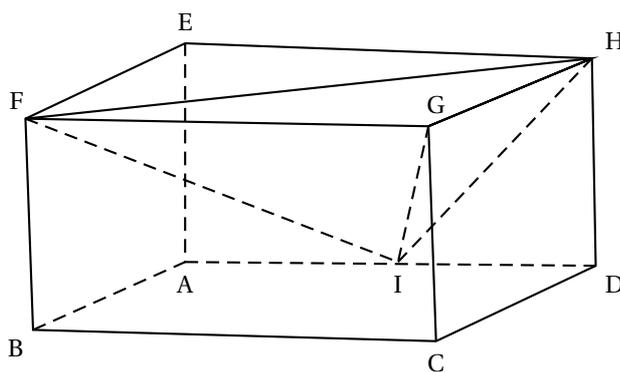
EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.

On appelle I le milieu de [AD].



L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \vec{AB}; \vec{AI}; \vec{AE})$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points E, G, H.
2.
 - a. Montrer que le volume V du tétraèdre GFHI est égal à $\frac{1}{3}$.
 - b. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.
En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).

3. Soit le vecteur \vec{n} de coordonnées (2 ; 1 ; -1).
- Montrer que le vecteur \vec{n} est normal au plan (FIH).
 - En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).
 - Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).
4.
 - La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?
 - Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.
 - Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*
Soit Γ la sphère de centre G passant par K.
Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?
(On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)

EXERCICE 2**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.Soit D la droite passant par le point A de coordonnées (0 ; 0 ; 2) et de vecteur directeur \vec{u} de coordonnées (1 ; 1 ; 0) et soit D' la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t' \\ y = -t' \\ z = -2 \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble S des points de l'espace équidistants de D et de D' .**1. Une équation de S**

- Montrer que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.
- Donner une représentation paramétrique de la droite D .
Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x ; y ; z)$ et H le projeté orthogonal de M sur D . Montrer que \overrightarrow{MH} a pour coordonnées $(\frac{-x+y}{2}; \frac{x-y}{2}; 2-z)$.
En déduire MH^2 en fonction de x , y et z .
Soit K le projeté orthogonal de M sur D' . Un calcul analogue au précédent permet d'établir que : $MK^2 = \frac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2$, relation que l'on ne demande pas de vérifier.
- Montrer qu'un point M de coordonnées $(x ; y ; z)$ appartient à S si et seulement si $z = -\frac{1}{4}xy$.

2. Étude de la surface S d'équation $z = -\frac{1}{4}xy$

- On coupe S par le plan (xOy) . Déterminer la section obtenue.
- On coupe S par un plan P parallèle au plan (xOy) .
Quelle est la nature de la section obtenue ?
- Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*
On coupe S par le plan d'équation $x + y = 0$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

EXERCICE 3**3 points****Commun à tous les candidats**

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction \ln est définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$, positive sur $]1 ; +\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y, \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif } x, [\ln(x)]' = \frac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

- a. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0 ; +\infty[$.
- b. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$.
- c. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n .

EXERCICE 4**7 points****Commun à tous les candidats**

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$2y' + y = 0 \quad (E),$$

dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

2. On considère l'équation différentielle :

$$2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (E')$$

- a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px) \text{ soit solution de } (E').$$

- b. Soit g une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E) .

Résoudre l'équation (E') .

3. Étudier les variations de la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x)$.
4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h .
5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on note \mathcal{C} la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$.
- a. Étudier les positions relatives de \mathcal{C} et Γ .
- b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.